



TITLE:

二成分非線型シュレディンガーモデルの量子逆散乱法(場の理論,基研研究会「ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題」,研究会報告)

AUTHOR(S):

鈴木, 康夫

CITATION:

鈴木, 康夫. 二成分非線型シュレディンガーモデルの量子逆散乱法(場の理論,基研研究会「ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題」,研究会報告). 物性研究 1985, 45(1): 25-28

ISSUE DATE:

1985-10-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/91819>

RIGHT:

$$\phi_s(x, t) = \frac{2\eta}{|\kappa|^{1/2}} \exp(4i\eta^2 t + i\theta_0) \operatorname{sech}(2\eta x)$$

が出てくる。但し $4\eta = |\kappa|(n+1)$ とおいた。さらに、 ϕ をはさむ状態をガリレイ変換すれば、moving ソリトンも得られる。即ち、量子論で束縛状態をつくる粒子数 n を無限大にするとその状態に関する $\phi(x)$ の形状因子が古典ソリトン解になる。これは Goldstone と Jackiw の予想¹⁰⁾ の一端と思われる。 n が有限の時の波形をグラフにすると、 $n=5\sim 6$ くらいですでに sech に近く、 $n \rightarrow \infty$ につれ、古典的波形に近づく様子がわかる。

参考文献

- 1) M. Wadati et al., Journal of Phys. Soc. Jpn to appear.
- 2) V. E. Zakharov et al., Sov. Phys. JETP **34** (1972) 62.
- 3) V. E. Zakharov et al., Sov. Phys. JETP **37** (1973) 823.
- 4) I. B. McGulie, J. Math. Phys. **6** (1965) 432.
E. H. Lief and W. Liniger, Phys. Rev. **130** (1963) 1605.
- 5) H. B. Thacker, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253.
- 6) A. Wissler, J. Math. Phys. **22** (1981) 750.
Y. Akutsu, unpublished.
- 7) A. B. Zamolodchikov et al.; Ann. Phys. **120** (1979) 253.
- 8) M. Wadati and M. Sakagami, J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 1983.
- 9) M. Göckeler, Z. Phys. **C7** (1981) 263, **11** (1981) 125.
F. A. Smirnov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **262** (1982) 78.
- 10) J. Goldstone and R. Jackiw, Phys. Rev. **D11** (1975) 1486.

二成分非線型シュレディンガーモデルの量子逆散乱法

東大・教養 鈴木 康 夫

量子非線型シュレディンガーモデルのハミルトニアンは、

$$H = \int dx (u_x^+ u_x + \kappa : u^+ u u^+ u :) \quad (1)$$

であるが、この u を $u = (\phi_1, \phi_2)$ と二成分に拡張したモデルの量子逆散乱法 (Q. I. S. M.)

研究会報告

について研究した。

場の量 $\phi_1(x, t)$, $\phi_2(x, t)$ に次のような交換関係を設定した。

$$\begin{aligned}\{\phi_1(x, t), \phi_1^+(y, t)\} &= [\phi_2(x, t), \phi_2^+(y, t)] = \delta(x-y) \\ \{\phi_1(x, t), \phi_1(y, t)\} &= [\phi_2(x, t), \phi_2(y, t)] = 0 \\ \{\phi_1^+(x, t), \phi_1^+(y, t)\} &= [\phi_2^+(x, t), \phi_2^+(y, t)] = 0\end{aligned}\quad (2)$$

運動方程式は,

$$\begin{aligned}i\phi_{1t} + \phi_{1xx} - 2\kappa\phi_2^+\phi_2\phi_1 &= 0 \\ i\phi_{2t} + \phi_{2xx} - 2\kappa(\phi_1^+\phi_1 + \phi_2^+\phi_2)\phi_2 &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

となる。

このモデルの線型補助問題 (A. L. P.) は,

$$\begin{aligned}v_{1x} - \frac{i}{2}\lambda v_1 &= i\sqrt{\kappa} v_3\phi_1 \\ v_{2x} - \frac{i}{2}\lambda v_2 &= i\sqrt{\kappa} v_3\phi_2 \\ v_{3x} + \frac{i}{2}\lambda v_3 &= -i\sqrt{\kappa}\phi_1^+v_1 - i\sqrt{\kappa}\phi_2^+v_2\end{aligned}\quad (4)$$

となり, $x \rightarrow -\infty$ での境界条件 (B. C.) が次のような Jost 演算子を考える。

$$\psi_{j1} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\lambda x}, \quad \psi_{j2} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\lambda x}, \quad \psi_{j3} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\lambda x}\quad (5)$$

(4)とあわせて, ψ_{ij} の積分方程式が求まる。たとえば,

$$\begin{aligned}\psi_{13} e^{-\frac{i}{2}\lambda x} &= i\sqrt{\kappa} \int dy \theta(x-y) \psi_{33} e^{\frac{i}{2}\lambda y} \phi_1 e^{-i\lambda y} \\ \psi_{23} e^{-\frac{i}{2}\lambda x} &= i\sqrt{\kappa} \int dy \theta(x-y) \psi_{33} e^{\frac{i}{2}\lambda y} \phi_2 e^{-i\lambda y} \\ \psi_{33} e^{\frac{i}{2}\lambda x} &= 1 - i\sqrt{\kappa} \int dy \theta(x-y) \{ \phi_1^+ e^{i\lambda y} \psi_{13} e^{-\frac{i}{2}\lambda y} + \phi_2^+ e^{i\lambda y} \psi_{23} e^{-\frac{i}{2}\lambda y} \}\end{aligned}\quad (6)$$

この方程式は逐次代入法で解くことができる。Jost 演算子の $x \rightarrow +\infty$ で係数

$$\psi_{j1} \sim \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) e^{\frac{i}{2}\lambda x} \\ a_{21}(\lambda) e^{\frac{i}{2}\lambda x} \\ a_{31}(\lambda) e^{-\frac{i}{2}\lambda x} \end{pmatrix}, \quad \psi_{j2} \sim \begin{pmatrix} a_{12} e^{\frac{i}{2}\lambda x} \\ a_{22} e^{\frac{i}{2}\lambda x} \\ a_{32} e^{-\frac{i}{2}\lambda x} \end{pmatrix}, \quad \psi_{j3} \sim \begin{pmatrix} a_{13} e^{\frac{i}{2}\lambda x} \\ a_{23} e^{\frac{i}{2}\lambda x} \\ a_{33} e^{-\frac{i}{2}\lambda x} \end{pmatrix}\quad (7)$$

$a_{ij}(\lambda)$ を散乱データ演算子という． a_{ij} は、 κ についてべき展開される． たとえば

$$a_{31}(k) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \int dx dy \theta(x_1 > y_1 > \cdots > x_n > y_n) e^{ik(x_1 + \cdots + x_n) - ik(y_1 + \cdots + y_n)} \\ \times \sum_{\{i\}} \phi_{i_1}^+(x_1) \cdots \phi_{i_n}^+(x_n) \phi_{i_n}(y_n) \cdots \phi_{i_1}(y_1) \quad (8)$$

ここで θ は階段関数の積である．

こうして得られた散乱データ演算子とハミルトニアンとの交換関係を調べると、

$$[H, a_{33}(k)] = 0 \\ [H, a_{31}(k)] = k^2 a_{31}(k) \quad [H, a_{32}(k)] = k^2 a_{32}(k) \quad (9)$$

となっていることがわかる．

また、この散乱データ演算子からなる行列 $T(\lambda) \equiv (a_{ij}(\lambda))$ は、

$$R_{\infty} [T(k_1) \tilde{\otimes} T(k_2)] = [T(k_2) \tilde{\otimes} T(k_1)] R_{\infty} \quad (10)$$

ただし

$$R_{\infty} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \alpha & & \beta & & \\ & & 0 & & & r \\ \hline & \beta & & \alpha & \alpha - \beta & \\ & & & & 0 & -r \\ \hline & & \beta & & -\beta & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \alpha - \beta \end{array} \right] \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{i\kappa}{k_1 - k_2 + i\kappa} \\ \beta &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_2 + i\kappa} \\ r &= \frac{k_1 - k_2 - i\kappa}{k_1 - k_2} \end{aligned} \quad (11)$$

という Yang-Baxter 関係を満たす．

ここで、演算子 $R_j^+(k)$ を

$$R_j^+(k) \equiv -i \frac{1}{\sqrt{\kappa}} a_{3j}(k) a_{33}^{-1}(k) \quad (12)$$

と定義すれば、散乱データの代数(10)を用いて

$$R_1(k_1) R_1(k_2) = -R_1(k_2) R_1(k_1) \\ R_2(k_1) R_2(k_2) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_2 + i\kappa} R_2(k_2) R_1(k_1) \quad (13)$$

$$R_1(k_1) R_2(k_2) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_2 + i\kappa} R_2(k_2) R_1(k_1) - \frac{i\kappa}{k_1 - k_2 + i\kappa} R_1(k_2) R_2(k_1)$$

$$R_2(k_1) R_1(k_2) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 - k_2 + i\kappa} R_1(k_2) R_2(k_1) - \frac{i\kappa}{k_1 - k_2 + i\kappa} R_2(k_2) R_1(k_2)$$

を得る。

また、(9)の性質より、 $R_j^+(k)$ は、ハミルトニアン H の固有状態を生成する演算子であることがわかる。真空 $|0\rangle$ を $\phi(x)|0\rangle$ によって導入すれば、状態

$$|\Phi_{i_1 \dots i_n}(k_1 \dots k_n)\rangle = R_{i_1}^+(k_1) \dots R_{i_n}^+(k_n) |0\rangle \quad (14)$$

は H の固有状態になる。実際、(9)をつかえば

$$H|\Phi_{i_1 \dots i_n}(k_1 \dots k_n)\rangle = \left(\sum_{j=1}^n k_j^2\right) |\Phi_{i_1 \dots i_n}(k_1 \dots k_n)\rangle \quad (15)$$

となる。

こうして、Q. I. S. M.によって、ハミルトニアンを対角化することができた。将来の発展としては、

1. Quantum Gel'fand Levitan 方程式を求め、有限温度の性質を議論すること。
2. N 成分に拡張すること。
3. $\kappa < 0$ にして、Bound Statesについて研究すること。

などがあげられる。

(註1) (10)式で $\tilde{\otimes}$ は graded space における直積を意味し、次のように定義される。

$$(A \tilde{\otimes} B)_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = (-1)^{P(\alpha)[P(\beta)+P(\delta)]} A_{\alpha\gamma} B_{\beta\delta}$$

ただし、 $P(1)=0$, $P(2)=P(3)=1$

(註2) ここでは Fermion-Boson の系をあげたが、2種の Fermion (Spin 1/2 のモデルに対応する) の場合も、同様に形式化できる。ただし、 $\tilde{\otimes}$ の定義で $P(1)=P(2)=0$, $P(3)=1$ とする必要がある。